Trayectorias y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos,

Eulerianos

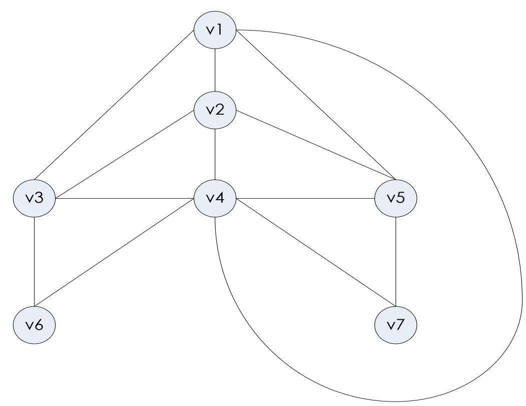
Trayectoria de Euler: recorrer una gráfica G utilizando cada arista de la gráfica sólo una vez, puede ser necesario o no comenzar y terminar en el mismo vértice.
Circuito de Euler: es una trayectoria de Euler que es a la vez un circuito.

Si **G** es un grafo tal que cada vértice tiene valencia par o grado par y donde existe siempre un camino entre dos vértices cualesquiera, entonces **G** tiene un circuito de **Euler.**

Un **circuito de Euler** es un recorrido que incluye todos los lados y vértices de un grafo dado, **sin repetir lados.**

Si un grafo **G** tiene un circuito **de Euler**, entonces debe ser conexo, ya que siempre es posible elegir una porción del circuito de **Euler** que sirva de camino entre dos vértices dados cualesquiera.

Ejemplo: Hallar el circuito de **Euler** para el siguiente grafo:



Primero se toma un vértice arbitrario y se recorre el grafo teniendo cuidado de **no repetir ningún lado.**

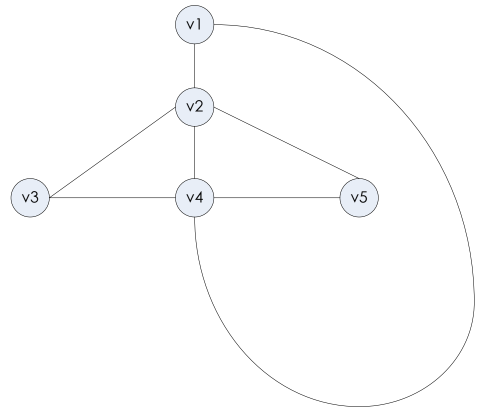
Después de llegar a un vértice se escoge arbitrariamente un lado para continuar el recorrido.

Esto siempre puede hacerse porque todo vértice tiene valencia par.

Por ejemplo podría empezarse en v6 y viajar a lo largo del camino **v6, v4, v7, v5, v1, v3, v6** al cual llamaremos **camino 1**, finalmente se regresara al vértice inicial.

En este punto, podría haberse recorrido todos los lados en cuyo caso se ha determinado un **circuito de Euler.**

De otra manera se quitan los lados recorridos y cualquier vértice aislado. En este caso se conserva el siguiente subgrafo.



Como se han quitado un número par de lados en cada vértice y la valencia de cada vértice en el grafo original era par, la valencia, de cada vértice en el subgrafo también es par. Se repite el procedimiento usando este subgrafo.

Como el grafo original era conexo, el camino **v6, v4, v7, v5, v1, v3, v6** tiene al menos un vértice en común con el subgrafo de la figura anterior.

Se toma uno de dichos vértices, por ejemplo **v3,** y se empieza el recorrido.
Supóngase que esta vez resulta **v3, v4, v1, v2, v5, v4, v2, v3** , que será el camino 2, ahora se han recorrido ya todos los lados. Si quedará alguno, se repetirá el procedimiento.

En esta construcción los dos caminos tienen en común **v3.**

Para obtener un circuito de **Euler** se comienza con el camino 1 que es **v6, v4, v7, v5, v1, v3, v6** cuando se halla el vértice **v3** se recorre el camino 2 que es **v3, v4, v1, v2, v5, v4, v2, v3** y luego se finaliza con el camino 1.

De tal forma se produce el circuito de Euler:

V6, v4, v7, v5, v1, <u>v3, v4, v1, v2, v5, v4, v2, v3</u>, v6

Puesto que este método puede aplicarse a cualquier grafo conexo que tengan todos los vértices con valencia par o grado par, el método y el ejemplo anterior conducen a lo siguiente: **<u>Un grafo G tiene un circuito de Euler si y solo si es conexo y todos sus vértices tienen valencia par.</u>**

Teoremas:

Teorema 1)

a) Si G es una gráfica conexa y todos los vértices tienen grado par, entonces existe un circuito de Euler en G.

b) Si una gráfica G tiene un vértice de grado impar, entonces no puede existir un circuito de Euler en G.

Teorema 2)

a) Si una gráfica G tiene más de dos vértices de grado impar, entonces no puede existir una trayectoria de Euler en G.

b) Si G es conexa y tiene exactamente dos vértices de grado impar, entonces existe una trayectoria de Euler en G. Cualquier trayectoria de Euler debe comenzar en un vértice de grado impar y terminar en el otro.

Ejemplos:

1.- Determinar un circuito y una trayectoria de Euler para las figuras 1 y 2. Justifica respuesta.

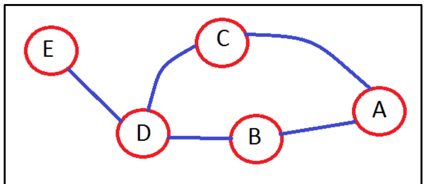


figura 1

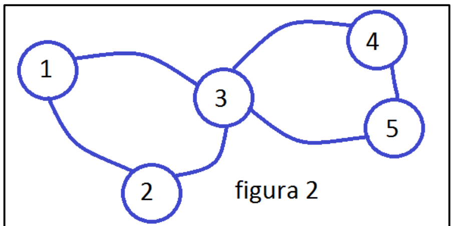


figura 2

2. ¿Cuáles de las gráficas de las figuras 3, 4 y 5 tienen un circuito de Euler, una trayectoria de Euler pero no un circuito de Euler, o ninguno de éstos.

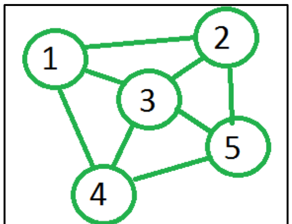


Figura 3

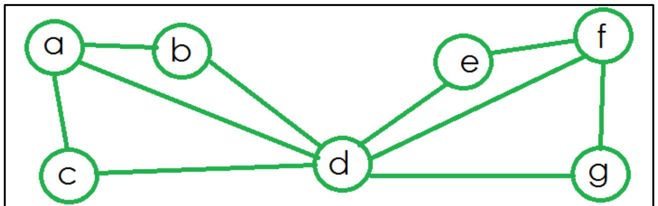


Figura 4

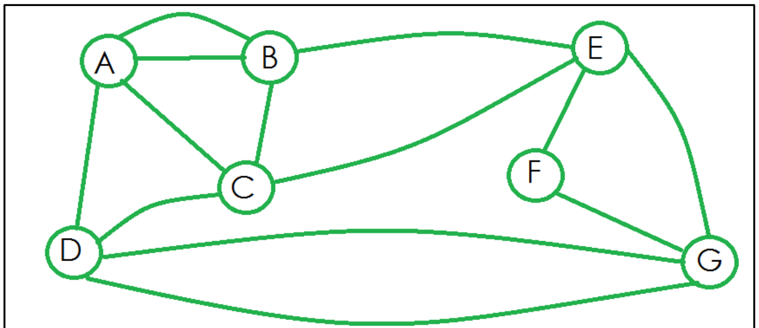
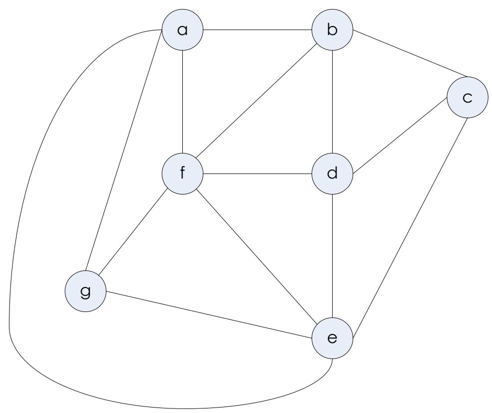


Figura 5

Hamiltonianos

Una trayectoria hamiltoniana es aquella que contiene cada vértice sólo una vez. Un circuito hamiltoniano es aquel que contiene cada vértice sólo una vez, excepto el primer vértice, que también es el último.

Por ejemplo: Si tomamos el siguiente grafo, tenemos el camino **a, b, c, d, e, f, g, a** es un circuito Hamiltoniano.

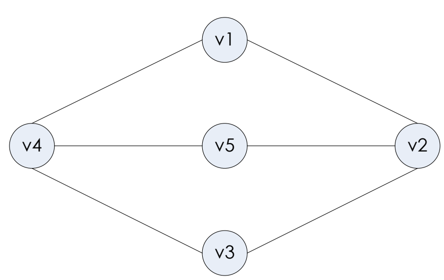


En un **circuito de Euler** se pasa por cada **lado** exactamente una vez.

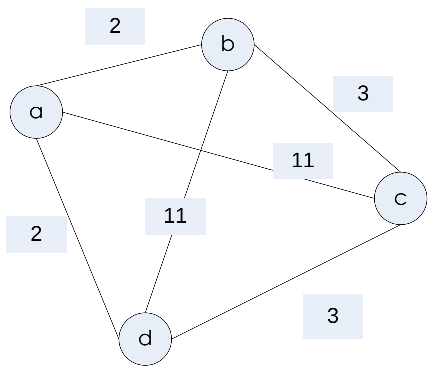
En tanto que en un **circuito Hamiltoniano** se pasa por cada **vértice** exactamente una vez.

Los circuitos hamiltonianos son llamados así en honor al Sir. William Roman Hamilton, quien patentó un juego en la forma de un dodecaedro, cada esquina del dodecaedro tenía el nombre de una ciudad y el problema era comenzar en cualquier ciudad, viajar a lo largo de las líneas, visitar cada población exactamente una vez y volver al punto de partida.

Ejemplo: El siguiente grafo no tiene un circuito de Hamilton.



Otro ejemplo: tenemos un conjunto de 4 ciudades y la distancia entre cada par de ellas, obtener la ruta que pase por cada ciudad exactamente una sola vez y termine en la misma ciudad con la menor distancia recorrida.



Si comenzamos en **c** el circuito de Hamilton **c, b, a, d, c,** la distancia que recorre es de 10.

Otra solución es empezar en **a**, el circuito de Hamilton **a, b, c, d, a,** la distancia que recorre es de 10.

a, **b, d, c, a** también es un circuito de Hamilton, pero la distancia sería 2+11+3+11=27, la cual no es el camino más corto.

Teorema 1
G tiene un circuito de Hamiltoniano si para cualesquiera dos vértices u y v de G que no sean adyacentes, el grado de u más el grado de v es mayor o igual a n. (n es el número de vértices)

G tiene un circuito hamiltoniano si cada vértice tiene grado mayor o igual que $\frac{n}{2}$.

Teorema 2
Sea m el número de aristas o lados de G. Entonces G tiene un circuito hamiltoniano si
m ≥ $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$. (n es el número de vértices)

Ejercicios: verificar si existe un circuito o trayectoria hamiltoniana en las figuras 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 Justifica tu respuesta.

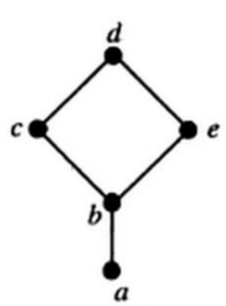


Figura 6

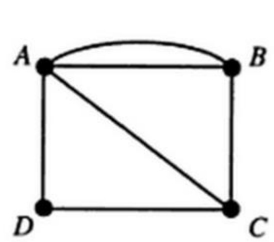


Figura 7

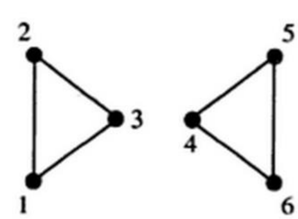


Figura 8

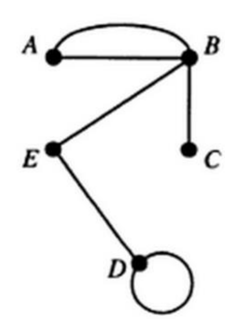


Figura 9

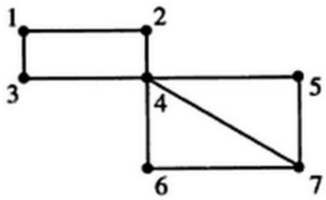


Figura 10

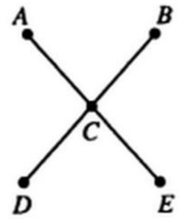


Figura 11

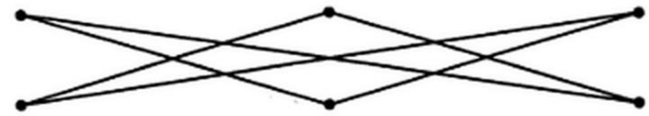


Figura 12

Ejercicios: Determinar para las siguientes graficas (13, 14, 15 y 16) un circuito hamiltoniano de peso mínimo

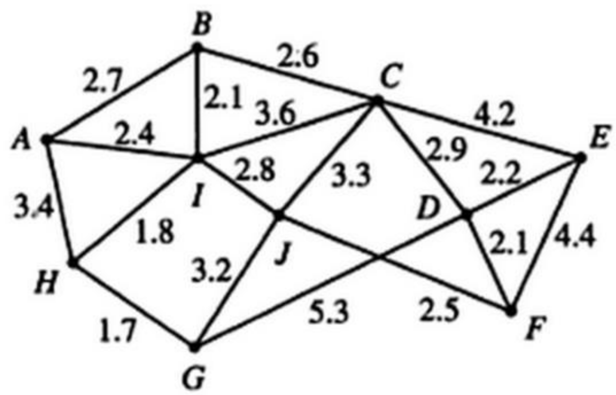


Figura 13

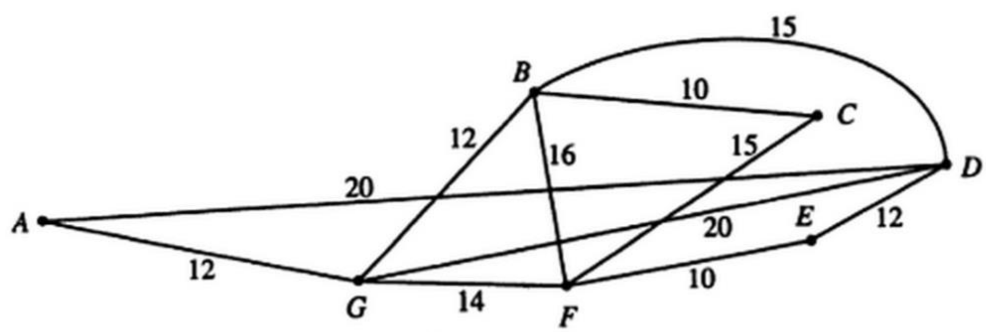


Figura 14

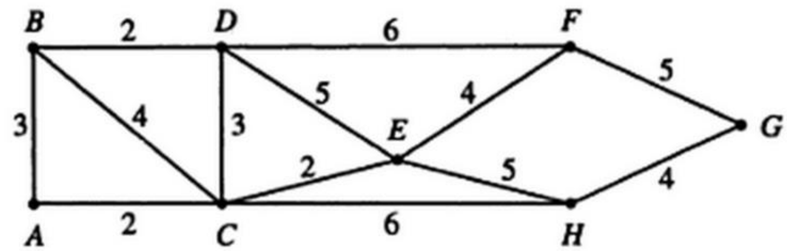


Figura 15

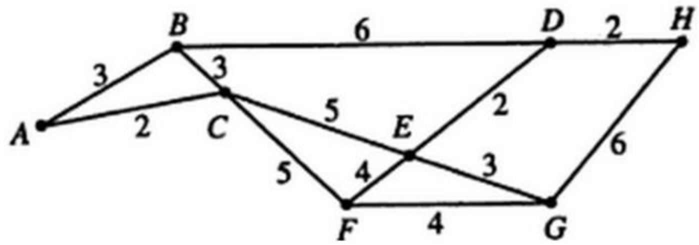


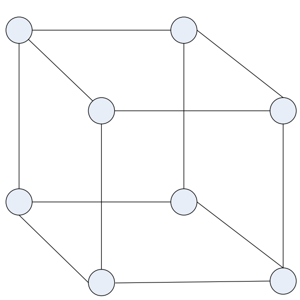
Figura 16

Grafos planares,

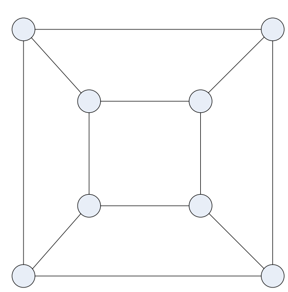
Un grafo se dice plano si admite una representación gráfica en el plano de modo que dos aristas o lados puedan cortarse únicamente en un vértice.

Un grafo es plano o planar, si puede trazarse en un plano sin que se crucen sus lados.

Una representación gráfica de este tipo se llama un **mapa,** ejemplo:



Grafo plano



Mapa del grafo plano